Relatividad: la física del espacio y del tiempo

J. Fernando Barbero G.
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC.
Semana de la Ciencia, 15 de noviembre de 2013.

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Sumario y comentarios preliminares

1. Introducción.
2. Espacio, tiempo y física: algo de historia.
3. Cinemática relativista.
4. Relatividad y geometría.
5. Bibliografía.

¿Qué NO pretendo con esta charla?

- **No pretendo ser exhaustivo**; en particular no me voy a ocupar ni de cuestiones experimentales, ni de dinámica relativista. Como digo en el título voy a concentrarme en los aspectos relacionados con la **física del espacio y del tiempo**.
- Simplemente **repetir** lo que aparece en la literatura de divulgación.
- Tampoco **dar la apariencia de que se puede entender todo a la primera** utilizando metáforas aparentemente sencillas y comprensibles pero peligrosas. Voy a contaros como entiendo yo la relatividad.
- Tampoco tengo la intención de que no se comprenda nada...

Sumario y comentarios preliminares

¿Qué pretendo con esta charla?

- Dar **claves para comprender** la relatividad.
- Resaltar el papel de la geometría y del **lenguaje geométrico**.
- Destacar el valor del punto de vista **operacional**.
- **¡Ojo con las representaciones gráficas!**
- Es fundamental entender y **reflexionar** sobre los **aspectos básicos.**
- Proporcionar los elementos necesarios para poder llevar hacerlo.

Donde sea conveniente usaré el siguiente código de colores:

Fácil para todo el mundo (1+1=2).

Hay que pensar un poco más (1+1=10).

Hay que pensar con calma (1+1=0).

¿Qué significa entender?

小野小町

花の色は
うつりにけりな
いたづらに
わが身世にふる
ながめせしまに

El color de la flor
ya se ha desvanecido,
mi vida pasa en balde
entre pensamientos ociosos
mientras contemplo
la lluvia incesante.

(Ono no Komachi, S. IX)

Una mala traducción, sin duda. ¿Qué ha sido de la sonoridad, o de la rima del poema original? ¿Entendemos de verdad lo que quería transmitir la autora? Si no conocemos **el lenguaje apropiado** es difícil que podamos ententer la esencia de las cosas; a lo sumo, quizá, una aproximación...

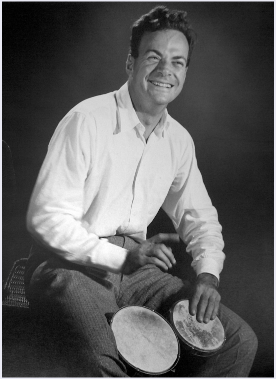
La física y el lenguaje de las matemáticas

- La física se apoya en **modelos matemáticos de la realidad**. No se reduce a ellos pero, sin su uso es casi imposible hacer nada.
- El **cálculo infinitesimal** de Newton fue imprescindible para la **mecánica**. Aun hoy en día, el cálculo, con sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales (y extensiones como el análisis complejo), junto con un poco de álgebra lineal son el eje central de la formación matemática que recibimos los físicos.
- La **mecánica cuántica** se basa en el análisis funcional (espacios de Hilbert) y el **álgebra lineal**.
- La rama de las matemáticas más apropiada para el estudio de la relatividad (especial y general) es la **geometría** (en particular lo que se conoce como geometría diferencial).

Una invitación

Intentemos construir la relatividad

What I cannot create I do not understand (Richard P. Feynman).



Para entender realmente las cosas no sirve una actitud pasiva...

Aunque pueda parecer increible hay muchos aspectos de la relatividad que pueden ser comprendidos sin conocimientos avanzados de matemáticas. Basta un poco de reflexión... y ganas de entender.

¿Lo intentamos?

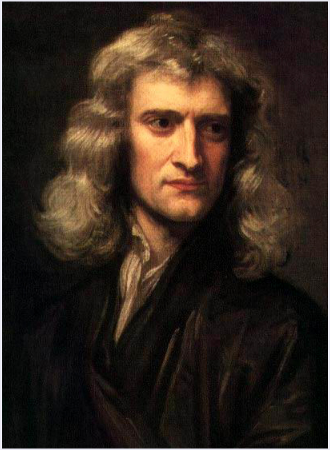
Dos puntos de vista posibles sobre espacio, tiempo y movimiento:

Relacional: Leibniz

- El espacio es el conjunto de todos los lugares que pueden ocupar los cuerpos.
- Mera ordenación de las cosas; el espacio es una forma de describir las **relaciones mutuas** entre los objetos.
- Niega la realidad del espacio como algo independiente de la mente.
- **El espacio es un concepto ideal**.

Dos puntos de vista posibles sobre espacio, tiempo y movimiento:

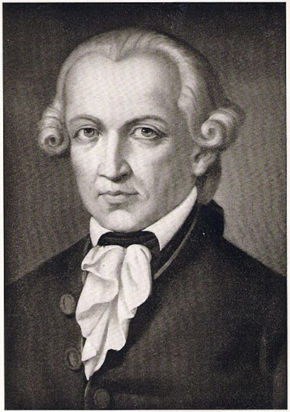
Absoluto: Newton



- El espacio es *más que una propiedad* pero *menos que una substancia*.
- Espacio **absoluto** al cual se refiere el movimiento de los objetos.
- El movimiento se produce con respecto a un espacio euclídeo (3D) eterno.
- Las **aceleraciones** son **absolutas**.
- Las velocidades también serían absolutas pero como las ecuaciones de la dinámica son invariantes Galilei es imposible determinarlas experimentalmente.
- El argumento del cubo giratorio.

Un punto de vista con peso filosófico...

Kant


IMMANUEL KANT
From a painting

- El espacio y el tiempo son *formas a priori de la sensibilidad*.
- No son substancias ni entidades por sí mismas.
- No se aprenden por la experiencia.
- Nos ayudan a **organizar y comprender** las experiencias sensoriales. Son elementos de un marco que utilizamos para estructurarlas.

Mach

- El momento angular y el momento lineal de los objetos existen como consecuencia de su interacción con el resto del universo.
- Atacó el concepto newtoniano de espacio absoluto.
- En la práctica acepta la dinámica newtoniana y simplemente sustituye el concepto de espacio absoluto de Newton por el sistema de referencia proporcionado por las "estrellas fijas".
- Fue uno de los grandes inspiradores del pensamiento de Einstein.

Es imposible hablar sobre el espacio y el tiempo de la física sin referirnos al movimiento y sus causas.

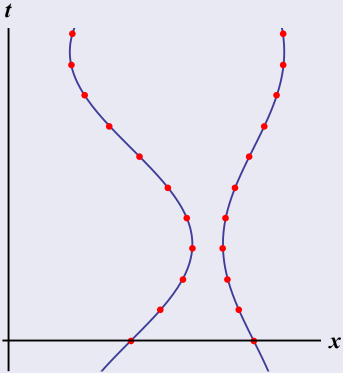
Cinemática

- Rama de la mecánica que se ocupa de **describir el movimiento** de los sistemas de partículas sin tener en cuenta las causas que lo producen.
- Se basa en conceptos básicos como el de **trayectoria** –entendida como curva suficientemente regular *parametrizada* por el tiempo– y ciertas magnitudes naturales asociadas (velocidades y aceleraciones).
- Estas trayectorias pueden ser vistas en el “espacio físico” o también en un **espacio de configuración** de dimensión apropiada (sistemas de partículas, sólido rígido,...).
- Se ocupa también de la descripción del movimiento en distintos **sistemas de referencia** y las propiedades de estos.

Dinámica

- Estudio del **movimiento en relación con sus causas**.
- El enorme avance que supuso la revolución newtoniana se produjo cuando Newton enunció las leyes de la dinámica y desarrolló el formalismo matemático necesario para utilizarlas adecuadamente.
- La segunda ley de Newton nos dice que las **aceleraciones** (a partir de las cuales podemos obtener las trayectorias de los cuerpos) vienen determinadas por las **fuerzas** $\vec{F} = m\vec{a}$.
- Algunos de estos avances matemáticos fueron también imprescindibles para desarrollar una cinemática apropiada.
- Comprende aspectos muy importantes desde el punto de vista conceptual como los asociados a la existencia de **leyes de conservación** y su papel en la descripción del movimiento.

Movimiento de una partícula sobre una recta



- Representamos las posiciones de las partículas materiales en función del tiempo.
- Los puntos rojos se corresponden con intervalos de tiempos iguales.

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA SOBRE UNA RECTA

- Este tipo de representación es muy conveniente. Nos lleva a la idea de **espacio-tiempo** formado por **sucesos** que son idealizaciones en las que se unen los puntos del espacio y los instantes de tiempo.
- Las trayectorias de la figura están parametrizadas de forma natural por t (¡para eso hacemos una representación con ejes x y t!). (Por cierto, ¿Tendría sentido adoptar una parametrización diferente?)

El espacio-tiempo.

El conjunto de todos los sucesos posibles

Tres enfoques sobre el espacio-tiempo:

1. **Aristotélico**.
2. **Galileano-newtoniano**.
3. **Relativista**.

El "espacio-tiempo" aristotélico (pre-galileano)

1. El espacio y el tiempo **no están interrelacionados** entre sí sino que son independientes.
2. Cada **suceso** está asociado a un **punto del espacio** y a un **instante de tiempo**.
3. Tiempo, posición y velocidad son **absolutos**.
4. Hay un **sistema de referencia privilegiado en reposo**.
5. Es el espacio-tiempo **de la vida cotidiana**.
6. Preguntas que tienen respuesta en este marco:

   ¿Dónde? ¿Cuándo? ¿Son dos sucesos simultáneos? ¿Suceden en el mismo sitio? ¿Cuál es la distancia entre ellos? ¿Está un objeto en reposo? ¿A qué velocidad se mueve?

(Un) modelo matemático

1. Espacio de la forma $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^3$. $\mathbb{A}^1$ es un espacio afín unidimensional asociado al espacio vectorial real $\mathbb{R}$. Análogamente $\mathbb{A}^3$ es un espacio afín tridimensional asociado al espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.
2. Dados dos sucesos $(a, \vec{a}), (b, \vec{b}) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^3$ definimos el **intervalo temporal** entre ellos como $t((a, \vec{a}), (b, \vec{b})) = b - a$ y su **distancia** como $d((a, \vec{a}), (b, \vec{b})) = \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.
   - Dos sucesos $a, b \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^3$ son **simultáneos** si $t(a, b) = 0$.
   - La relación de simultaneidad es de equivalencia y sus clases son *hiper-superficies de simultaneidad* (3-dimensionales).
   - Cada una de ellas es un espacio euclídeo.
3. El grupo de simetrías es $(\mathbb{R}, +) \otimes \mathbb{E}(3)$ (traslaciones temporales y grupo euclídeo tridimensional para el espacio).

El espacio-tiempo galileano

1. **Sistemas de referencia:** Conjuntos de objetos físicos, con posiciones relativas invariables, que utilizamos situar el resto de los objetos.
2. No hay **ningún sistema de referencia privilegiado** pero sí una clase de sistemas especiales, equivalentes en cierto sentido, que se mueven entre sí a velocidades relativas constantes: los **sistemas inerciales**.
3. El **espacio y el tiempo son independientes** y la **simultaneidad es absoluta**.
4. Las posiciones son **absolutas solo en cada instante de tiempo**. No podemos decir si sucesos no simultáneos se producen en el mismo lugar o no.
5. Un ejemplo aproximado: **el espacio intergaláctico**.
6. Preguntas que tienen respuesta en este marco:
   - Simultaneidad, intervalo temporal entre sucesos, distancia entre sucesos simultáneos, velocidad relativa.

Modelo matemático

1. Espacio afín $\mathbb{A}^4$ de dimensión 4. Dados dos puntos (sucesos) $a, b \in \mathbb{A}^4$ existe un vector $a - b \in \mathbb{R}^4$ que los conecta.
2. Una aplicación lineal sobreyectiva, **el tiempo**, $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. El intervalo temporal entre dos sucesos $a, b \in \mathbb{R}^4$ es $t(b - a)$.
   - Dos sucesos a, b son **simultáneos** si $t(a - b) = 0$.
   - La relación de simultaneidad es de equivalencia y sus clases son *hipersuperficies de simultaneidad* (3-dimensionales).
   - $\ker t \cong \mathbb{R}^3$.
3. **Distancia entre sucesos simultáneos**. Si $t(a - b) = 0$ definimos $d(a, b) = \langle a - b, a - b \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar de $\mathbb{R}^3 \cong \ker t$. Cada hipersuperficie de simultaneidad es un espacio euclídeo.
4. El grupo de simetrías es el grupo de **transformaciones de Galilei**.
5. Hay otros puntos de vista geométricos posibles (fibrados).

Espacio-tiempo relativista: conceptos básicos

- Una de las principales dificultades para entender la relatividad es la necesidad de prestar atención a aspectos que están en la base de la cinemática tradicional en una forma "demasiado implícita". Esto es particularmente cierto con respecto a las definiciones de:
  - **Simultaneidad.**
  - **Tiempo propio.**
  - **Distancias y longitudes.**
  - **Velocidades.**
- La descripción final de la cinemática relativista comparte elementos comunes con la newtoniana-galileana pero hay diferencias fundamentales.
- ¡En cierto sentido es la **más simple**!

Relojes y rayos de luz

1. **Un reloj** es un dispositivo que mide el *tiempo propio* del observador que lo transporta.
2. Los **rayos de luz** que parten de un suceso dado se mueven de **manera independiente** del estado de movimiento de la fuente **(hipótesis-ℓ)**.
   - De cada suceso sale un solo rayo en cada dirección (análogamente solo llega uno).
   - Los rayos que salen o llegan a un suceso forman el **cono de luz**.
   - Sus trayectorias contienen información intrínseca sobre el espacio-tiempo (causalidad).
   - Son sondas que nos permiten **explorar el espacio tiempo** y **definir magnitudes geométricas de forma operacional**.

Ley básica de la percepción espacio-temporal.

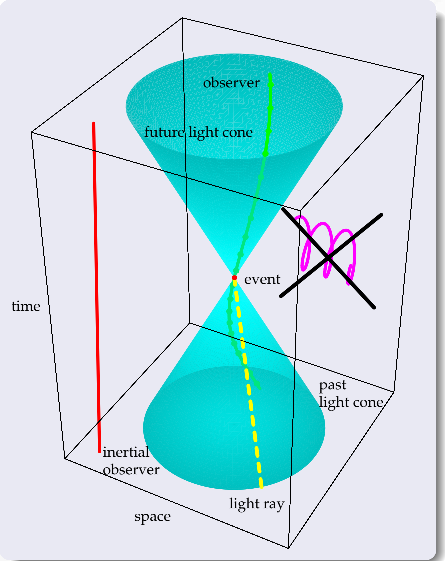
Todo lo que se ve son... ¡rayos de luz!

Observadores inerciales

- **Observadores en el estado de movimiento más simple posible.**
- Todos son completamente equivalentes (no hay ninguno privilegiado).
- Pueden estar en movimiento relativo unos respecto a otros.
- Una forma conveniente para entender la relatividad especial en 1+1 dimensiones (el método del parámetro k de Bondi.)

  hipótesis-k en 1+1 dimensiones: El tiempo propio entre la recepción de dos rayos de luz por un observador inercial Obs_2 emitidos por otro Obs_1 es proporcional al intervalo de tiempo propio de emisión. La constante de proporcionalidad es positiva.

- Como ninguno de ellos es un observador privilegiado la constante es la misma si los rayos son enviados por Obs_2 y recibidos por Obs_1.



Un punto de vista “divino” fuera del espacio y del tiempo. Una abstracción (no puedo “verlo”).

Líneas de universo: Historias de observadores físicos.

- Observadores físicos “dentro” del cono de luz.

Rayos de luz: sondas espacio-temporales.

- Un cono de luz en cada suceso.
- Representaré los rayos de luz con rectas “que formen un ángulo fijo con respecto a la dirección temporal”.

¿Qué pasa con las cuatro dimensiones?

- Nada grave... la geometría en cuatro dimensiones es muy parecida a la geometría en dimensiones inferiores.
- Podemos manipular con suma facilidad objetos geométricos sencillos.
- **Ejemplo:** un triángulo rectángulo de lados $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y 2:

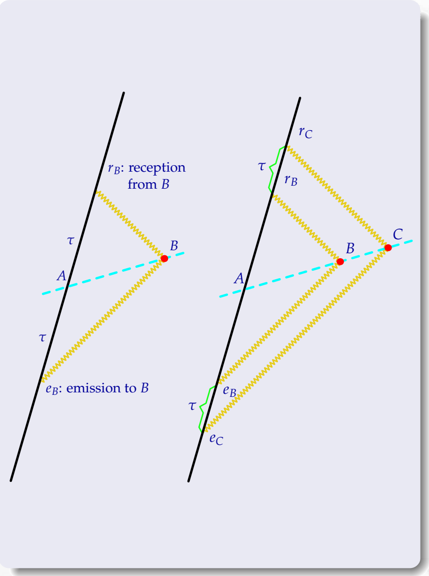
$$A(1,0,1,0)\,,\quad B(0,1,0,1)\,,\quad C(1,0,0,1)$$

- Podemos calcular distancias y ángulos con la ayuda del **producto escalar** "euclídeo": $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$$

$$\|\vec{x}\|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}\,,\qquad \cos\alpha_{xy}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

- En el espacio tridimensional tendríamos que haber hecho lo mismo...

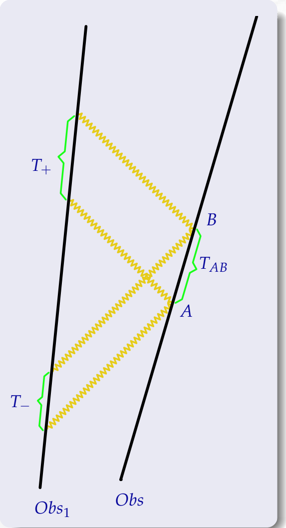


Consideremos un observador inercial $\mathcal{O}$, un suceso A sobre su línea del universo y otro B fuera de su línea del universo donde hay situado un espejo.

- Diremos que A y B son **simultáneos** para $\mathcal{O}$ si puede enviar un rayo de luz a B y recibirlo reflejado de manera que el intervalo medido por su reloj entre la emisión y A sea el mismo que entre A y la recepción.
- Se puede generalizar el proceso para dos sucesos B y C que no estén en la línea del universo del observador.
- Podemos definir así **superficies de simultaneidad** asociadas al observador.

Tiempo: el intervalo relativista

¿Puede un observador inercial Obs_1 medir el intervalo temporal entre sucesos que estén en la línea del universo de otro Obs ? **SI**, usando la **hipótesis-k**.

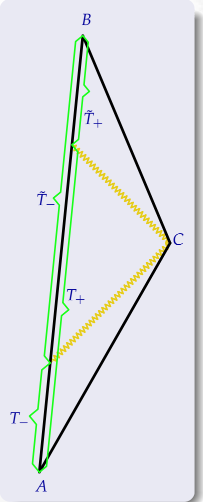


- T_-: diferencia entre tiempos propios de emisión por Obs_1.
- T_+: diferencia entre tiempos propios de recepción por Obs_1.
- $T_{AB} = kT_-$ y por simetría por $kT_{AB} = T_+$, por tanto

$$kT_{AB}^2 = kT_+T_- \Rightarrow T_{AB} = \sqrt{T_-T_+}$$

- Nótese que $T_+ = k^2T_- := (1+z)^2T_-$
- El Obs_1 determina k^2 al recibir los rayos de vuelta.
- z recibe el nombre de **corrimiento al rojo** (*redshift*) (aunque puede ser al azul, *blueshift*).

El tiempo propio depende del observador. Supongamos que los dos relojes (idénticos) que llevan los observadores están sincronizados en A.



Un observador es inercial (AB) y el otro lo es en AC y CB pero deja de serlo en C.

$$T_{AC} = \sqrt{T_+ T_-} \leq \frac{T_+ + T_-}{2}$$

$$T_{CB} = \sqrt{\tilde{T}_- \tilde{T}_+} \leq \frac{\tilde{T}_- + \tilde{T}_+}{2}$$

$$\Downarrow$$

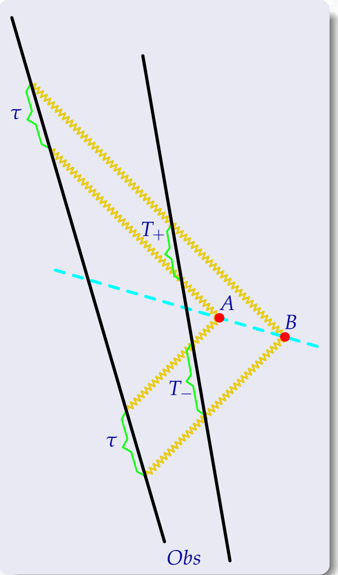
$$T_{AC} + T_{CB} = \sqrt{T_+ T_-} + \sqrt{\tilde{T}_+ \tilde{T}_-} \leq$$

$$\frac{1}{2}\left[T_- + T_+ + \tilde{T}_- + \tilde{T}_+\right] =$$

$$= T_- + \tilde{T}_- = T_+ + \tilde{T}_+ = T_{AB}$$

¿No os recuerda a la **desigualdad triangular**?

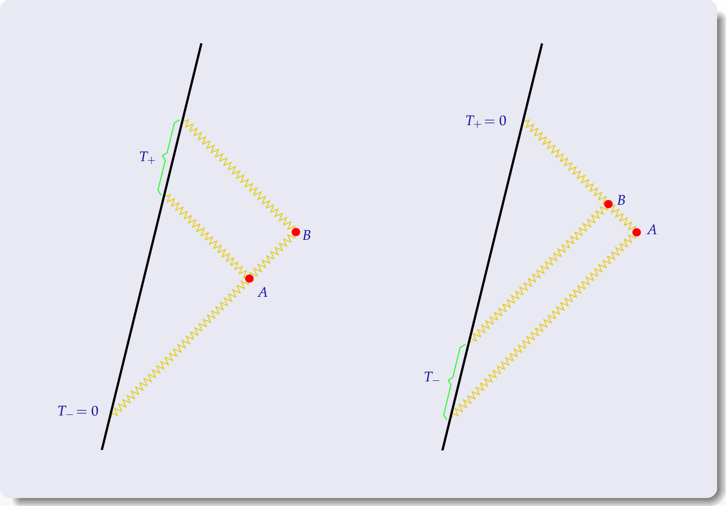
Longitudes (distancias espaciales)



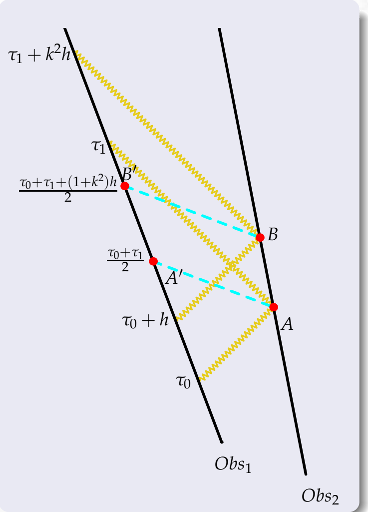
- Dos sucesos A y B con espejos.
- Un observador inercial *Obs* tal que A y B sean simultáneos.
- **Definimos** la distancia espacial de A a B como $\ell_{AB} = c\tau$ (c es un factor de conversión).
- Puede otro observador inercial determinar esta distancia? Sí porque $T_- = k\tau$ y $\tau = kT_+ \rightsquigarrow \tau = \sqrt{T_- T_+}$.
- La misma expresión que encontramos para el intervalo de tiempo propio con la diferencia de que el primer rayo emitido llega el último.
- Cuando sucede esto decimos que el *intervalo* entre los sucesos A y B es de **tipo espacio**.

Intervalos de tipo luz (nulos)

Los intervalos de tipo luz se dan cuando dos de los rayos emitidos o recibidos coinciden. En ese caso el intervalo entre A y B es $\sqrt{T_- T_+} = 0$.



Medida realizada por Obs_1.



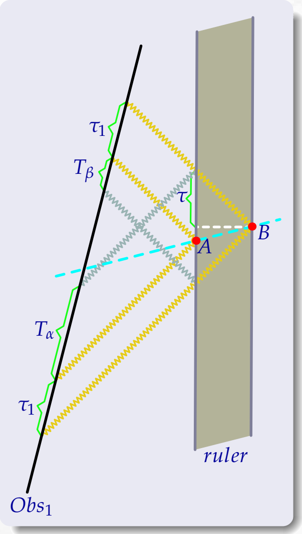
$$\ell_{AA'} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} c, \quad \ell_{BB'} = \frac{\tau_1 - \tau_0 + (k^2 - 1)h}{2} c$$

$$T_{A'B'} = \frac{(1 + k^2)h}{2},$$

$$\boxed{v = \frac{\ell_{BB'} - \ell_{AA'}}{T_{A'B'}} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} c}$$

- Obs_1 se "mueve" con respecto a Obs_2; el intervalo de recepción es $k^2 h$ donde h es el retardo propio entre la emisión de los dos pulsos.
- k^2 se mide en el instante de la recepción.
- $-c < v < c$. **¡Hay una velocidad máxima!**
- ¡El otro observador obtendría el mismo resultado! (nada distingue a un observador inercial de otro.)

Medida de la **longitud de una regla** por un observador inercial.



$c\tau$ es la longitud propia de la regla. La longitud medida por Obs_1 es $\ell_1 := \ell_{AB} = c\tau_1$. Tengo que encontrar la **relación entre las dos**.

Como $\tau_1 = k^2 T_\alpha$ y $T_\beta = k^2\tau_1$ obtenemos que

$$\tau_1 + T_\alpha = \tau_1\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right), \quad \tau_1 + T_\beta = \tau_1(1+k^2)$$

y por tanto

$$\ell_{prop} = c\tau = \frac{c}{2}\sqrt{(\tau_1+T_\alpha)(\tau_1+T_\beta)}, = c\tau_1\frac{1+k^2}{2k} = \frac{c\tau_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =: \ell_1\gamma$$

$$\boxed{\ell_1 = \ell_{prop}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \ell_{prop}}$$

Comentarios

- He hecho hincapié en las **definiciones operacionales** (explícitas aunque idealizadas) y las he combinado con construcciones geométricas (sobre las que no he sido tan explícito...).
- Aunque me he concentrado en el caso 1+1 dimensional, para el que el método del factor k es muy bueno, es posible extender estas ideas a 1+2 y 1+3 dimensiones. Aquí aparecen fenómenos notables asociados con **efectos direccionales** como la precesión de Thomas.
- **No he usado coordenadas ni tampoco transformaciones de Lorentz**.
- Por supuesto es posible todo lo anterior en sistemas inerciales utilizando transformaciones de Lorentz de la manera tradicional (de hecho es muy instructivo hacerlo) pero es extremadamente útil poder **referirse a los procedimientos operacionales** en caso de duda.

¿Como es entonces el espacio tiempo relativista?

El espacio-tiempo de la relatividad especial

1. No hay **ningún sistema de referencia privilegiado** pero sí una clase de sistemas especiales, equivalentes en cierto sentido, que se mueven entre si a velocidades relativas constantes: los **sistemas inerciales**.
2. El **espacio y el tiempo no son independientes** y la **simultaneidad** es un concepto que depende del observador.
3. No hay ni posiciones ni distancias absolutas.
4. Hay un concepto de **intervalo espacio-temporal** para cada par de sucesos $\sqrt{T_+ T_-}$ (utilizar un signo para distinguir el caso espacial del temporal).
5. Preguntas que tienen respuesta en este marco:
   - Intervalo espacio-temporal entre sucesos, distancia entre sucesos simultáneos, velocidad relativa,...

Ejercicios que podéis intentar:

1. **Simetría** entre resultados obtenidos por observadores inerciales.
2. Ley de **composición** de velocidades (más de dos sistemas inerciales).
3. Definir **coordenadas naturales** asociadas a observadores inerciales y las leyes que las relacionan (**transformaciones de Lorentz**).
4. Diseñar un procedimiento operacional para medir la **velocidad de la luz**.
5. ¿En qué se diferencian las situaciones en las que los observadores inerciales se acercan o se alejan?
6. Mejorar el procedimiento para medir la longitud de una regla.
7. ¿Sabríais introducir procedimientos operacionales que usen **reglas en lugar de rayos de luz**?
8. ¿Sabríais estudiar los casos **$1+2$ y $1+3$ dimensionales**?...

Modelo matemático

1. Espacio afín $\mathbb{A}^4$ de dimensión 4. Dados dos puntos (sucesos) $a, b \in \mathbb{A}^4$ existe un vector $a - b \in \mathbb{R}^4$ que los conecta.
2. Un intervalo espacio-temporal definido por una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con signatura $(- + + +)$. Los pares de sucesos (intervalos) se clasifican como:
   - De **tipo tiempo** si $\langle a - b, a - b \rangle < 0$.
   - De **tipo espacio** si $\langle a - b, a - b \rangle > 0$.
   - De **tipo luz** si $\langle a - b, a - b \rangle = 0$.
3. El grupo de simetrías es el grupo de **transformaciones de Poincaré**.
4. Un punto de vista alternativo muy importante. Interpretar el espacio-tiempo de la relatividad especial como una **variedad diferenciable**.

- La relatividad especial admite otra **interpretación geométrica.**
  1. Espacio-tiempo $\mathbb{R}^4$ (con la estructura diferenciable ordinaria).
  2. **Métrica de Minkowski** $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.
  3. Los sistemas inerciales vienen dados por isometrías de esta métrica.
  4. Varios tipos de trayectorias en el espacio-tiempo ("historias"): curvas de tipo **temporal**, **nulo** o **espacial** (vectores tangentes).
- Las partículas materiales siguen curvas de tipo tiempo, pueden llevar relojes que miden el **tiempo propio**.
- El tiempo propio viene dado por $d\tau^2$.
- Las **geodésicas** de **tipo tiempo** de esta métrica describen el movimiento de las **partículas libres**.
- Las **geodésicas nulas** de esta métrica describen el movimiento de los **rayos de luz.**

La antesala de la relatividad general, la teoría relativista de la gravitación.

Bibliografía

Hay una bibliografía extensísima. Una pequeña selección:

libros básicos/divulgativos

- H.Bondi, *Relativity and common sense*, Dover (1980).
- J. M. Sánchez Ron, *El origen y desarrollo de la relatividad*, Alianza Editorial (1983).
- R. Geroch, *La relatividad general de la A a la B*, Alianza Editorial (1986).
- A. Einstein, *El significado de la relatividad*, Espasa libros. (2005).
- R. Penrose, *El camino a la realidad: Una guía completa a las leyes del universo*, Debate (2006).