

Base 2, base 3,..., base n : curiosidades de los sistemas de numeración

J. Fernando Barbero G.

Instituto de Estructura de la Materia, CSIC.

Grupo de Teorías de Campos y Física Estadística,
Unidad Asociada CSIC-UC3M

Semana de la Ciencia en Madrid, 12 de noviembre de 2019



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA, INNOVACIÓN
Y UNIVERSIDADES



CSIC

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

FECYT



FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA

Unas palabras de Plutarco

«La mente no es un recipiente que hay que llenar, sino un fuego que hay que encender.»

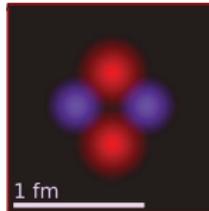
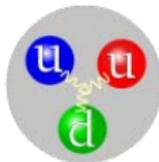
Un experimento

- Es una charla sobre **matemáticas** con **espíritu matemático**.
- Mi objetivo es haceros **pensar e invitaros a que os hagáis preguntas**; también contaros cosas curiosas.
- Para ello me fijaré en objetos matemáticos muy básicos: **los números**.
- Por el camino percibiremos algunas limitaciones de nuestro pensamiento y nos daremos cuenta de que algunas cuestiones relacionadas con los números y su representación están grabadas a fuego en nuestras mentes.
- **Por ejemplo:** el sistema de **numeración decimal** y los **numerales indo-arábigos**.

¿Cómo contamos?

back

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho...



Los números

- Expresan una propiedad básica de los conjuntos finitos **relacionada con su tamaño**.
- No los voy a definir de forma abstracta. Me apoyaré en la idea intuitiva que todos tenemos sobre los **números enteros**.
- Es muy importante distinguir el **concepto abstracto de número** de su **representación escrita** (*numeral*).
- **¿Cómo representamos o ponemos nombres a las cantidades?**

Vamos a contar...

- No es práctico **inventar una palabra diferente** para cada número...
- Si, por otra parte, queremos representarlos de forma gráfica no arreglamos nada poniendo puntitos o palotes que representen cada unidad...
- Tampoco sirve de mucho inventar **un símbolo distinto** para cada número.
- Necesitamos una **forma sistemática** de poder expresar cantidades arbitrarias mediante un **conjunto finito de palabras** (para el lenguaje verbal) o **símbolos** (si queremos hacer aritmética).
- Varios sistemas:
 - Notaciones «aditivas» (p.ej. números romanos). Como si usáramos monedas.
 - **Sistemas de numeración posicionales.**

Números y numerales

[back](#)

¿Habéis intentado multiplicar alguna vez con números romanos?

¿Habéis intentado multiplicar alguna vez con números romanos?

Sistemas de numeración posicionales.

- Se basan en introducir **un número finito de símbolos** distintos para representar números enteros consecutivos hasta uno dado que define la **base del sistema de numeración**.
- Es muy importante, como veremos, introducir un símbolo que represente una cantidad nula: **el cero**.
- Nosotros empleamos el **sistema de numeración decimal** (tenemos diez dedos). Las palabras que utilizamos para nombrar los números están adaptadas a este sistema.
- Otras culturas utilizan sistemas de numeración distintos. Hay culturas en América del Norte que cuentan *con los huecos de los dedos* (octal).
- En nuestro sistema de numeración decimal utilizamos los numerales arábigos: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**, pero hay otros:

Numerales del mundo

[back](#)

• ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

I II III IV V VI VII VIII IX X

০ ১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯

൦ ൧ ൨ ൩ ൪ ൫ ൬ ൭ ൮ ൯

๐ ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗ ๘ ๙

〇 一 二 三 四 五 六 七 八 九

Numerales arábigos orientales, romanos, bengalíes, malayalam, tailandeses y chinos.

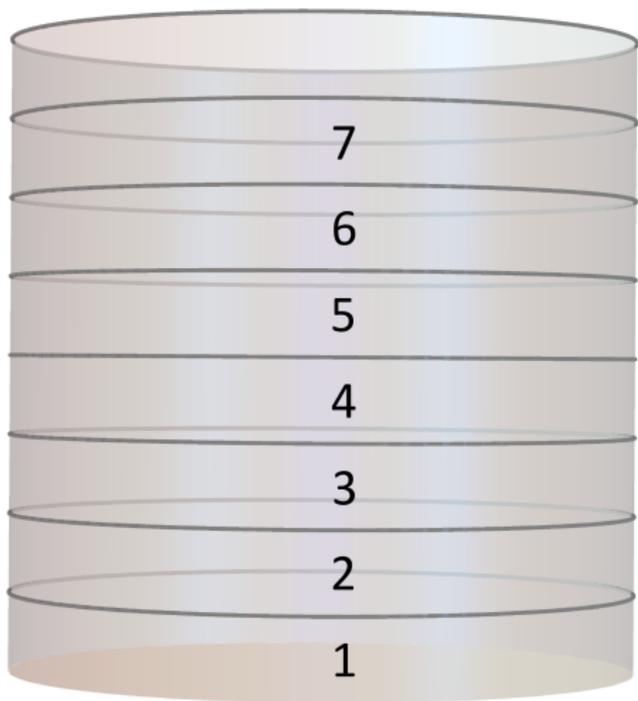
Numerales del mundo

[back](#)



¿Cómo funcionan nuestros números? [back](#)

Base 8



8^2



8^1



8^0



$\frac{1}{8}$



$\frac{1}{8^2}$

,

Una colección de recipientes para la base 8

- Recipientes divididos en **ocho** partes iguales (señaladas con divisiones horizontales). Las siete partes inferiores de cada recipiente están etiquetadas por **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**, siempre en ese orden.
- Cada recipiente **tiene un volumen distinto**. Los ordenamos de izquierda a derecha de forma que sus volúmenes disminuyan.
- Están contruidos de manera que **el volumen de un recipiente es igual al delimitado por la primera división del inmediatamente anterior**. De esta forma si vertemos una cierta cantidad de líquido en uno de ellos y nos fijamos en el líquido que supera la última subdivisión alcanzada, podemos asegurar que este exceso **cabe siempre** en el recipiente situado inmediatamente a la derecha.
- Uno de los recipientes corresponde al **volumen unidad**. Lo señalamos colocando **una coma inmediatamente a su izquierda**.
- Disponemos de todos los recipientes que necesitemos.

Representación simbólica de una cantidad de líquido

- 1 Buscamos un recipiente en el que quepa y lo vertemos en él.
- 2 Si el líquido no llega ni a la primera subdivisión lo echamos en el recipiente que esté situado inmediatamente a la derecha.
- 3 Haciendo esto las veces que haga falta, en algún momento conseguiremos que el líquido **sobrepase** la primera subdivisión de algún recipiente o **coincida** con ella.
- 4 Si está lleno **exactamente** hasta alguna subdivisión, paramos.
- 5 Si la superficie de líquido queda entre dos subdivisiones vertemos lo que sobrepase a la última en el recipiente situado inmediatamente a la derecha (estamos seguros de que cabe).
- 6 Con el último recipiente utilizado procedemos como al principio, empezando por el paso 2.

Dos posibilidades

- 1 **El proceso para en algún paso.** Para expresar simbólicamente la cantidad de líquido que tenemos, **en base ocho**, comenzamos por el primer recipiente (empezando por la izquierda) que tenga líquido y anotamos el símbolo que aparece justo antes de la subdivisión más alta alcanzada por él. Pasamos entonces al siguiente recipiente y hacemos lo mismo anotando el símbolo inmediatamente a la derecha del anterior; en caso de que no haya líquido usamos el símbolo **0**. Si el último recipiente con líquido está antes de la coma añadimos un 0 por cada uno de los recipientes vacíos que la precedan y paramos. Si hay recipientes con líquido tras la coma ponemos la coma en nuestra cadena de símbolos y procedemos como antes hasta alcanzar el último que tenga líquido.
- 2 **El proceso no para.** Entonces nos conformamos con una aproximación, salvo que en algún punto a la derecha de la coma se alcance un «ciclo».

Comentarios

- El papel del 0 es indicar que un recipiente concreto «no se usa». No ponemos ceros a la izquierda...
- La representación así obtenida **es única** (con una posible salvedad).
- **Podríamos haber empleado cualquier otra base.** Si la base es mayor que diez tenemos que **introducir otros símbolos** para expresar los numerales correspondientes al once, doce,...
- Para bases razonablemente pequeñas (hasta alrededor de 35) podemos añadir letras.
- Por ejemplo, en **hexadecimal** (base 16) se usan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f. Luego veremos la base 60.
- El número de cifras a la izquierda de la coma es **siempre finito**, ¡sin embargo a la derecha de la coma podemos tener una sucesión infinita de cifras!

¿Tiene sentido considerar bases distintas?

- El número es el número **independientemente de su representación**.

$$1263437 = 100110100011101001101_2$$

- «Entendemos» intuitivamente el número de la izquierda pero el de la derecha nos deja bastante fríos... En base dos parece que la información numérica **está más diluida** (tiende a estar más concentrada en la posición de las cifras y menos en su valor). Si hay demasiadas posiciones nos perdemos (nos cuesta «contar de un vistazo»).

- Al revés

$$1263437 = 13474d_{16}$$

- En base 16 (hexadecimal) la información **está menos concentrada** en la **posición** de las cifras.

¿Cuanto se «estiran» los números al cambiar de base?

- El número anterior tiene siete cifras en base diez, veintiuna en base dos y seis en hexadecimal (factores ≈ 3 y $\approx 6/7$)
- Los valores «exactos» son $\log_2 10 \approx 3,32193$ y $\log_{16} 10 \approx 0,830482$.
- En base 60 sería $\log_{60} 10 \approx 0,562382$
- La «finura» de los órdenes de magnitud es mayor para bases pequeñas.

Hay características de los números que son independientes de la representación y otras que no, por ejemplo:

- Ser **capicúa** depende, obviamente de la base: once es capicúa en base 10 pero no en base 2 ($11 = 1011_2$).
- Ser **par** (es decir, **divisible por dos**) es independiente de la base, pero ¡ojo! $14 = 11_{13}$

Tablas de suma y multiplicación back

Base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Tabla de sumar en base 16

[back](#)

Base 16

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a
c	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b
d	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c
e	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c	1d
f	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c	1d	1e

Tabla de multiplicar en base 16 back

Base 16

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
2	0	2	4	6	8	a	c	e	10	12	14	16	18	1a	1c	1e
3	0	3	6	9	c	f	12	15	18	1b	1e	21	24	27	2a	2d
4	0	4	8	c	10	14	18	1c	20	24	28	2c	30	34	38	3c
5	0	5	a	f	14	19	1e	23	28	2d	32	37	3c	41	46	4b
6	0	6	c	12	18	1e	24	2a	30	36	3c	42	48	4e	54	5a
7	0	7	e	15	1c	23	2a	31	38	3f	46	4d	54	5b	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1b	24	2d	36	3f	48	51	5a	63	6c	75	7e	87
a	0	a	14	1e	28	32	3c	46	50	5a	64	6e	78	82	8c	96
b	0	b	16	21	2c	37	42	4d	58	63	6e	79	84	8f	9a	a5
c	0	c	18	24	30	3c	48	54	60	6c	78	84	90	9c	a8	b4
d	0	d	1a	27	34	41	4e	5b	68	75	82	8f	9c	a9	b6	c3
e	0	e	1c	2a	38	46	54	62	70	7e	8c	9a	a8	b6	c4	d2
f	0	f	1e	2d	3c	4b	5a	69	78	87	96	a5	b4	c3	d2	e1

Cuentas en binario

back

Una suma

$$\begin{array}{r} 1011101 \\ 1011101 \\ + 111101 \\ \hline 1101001 \\ \hline 101100000 \end{array}$$

$$93 + 93 + 61 + 105 = 352$$

Una multiplicación

$$\begin{array}{r} 10110 \\ \times 11011 \\ \hline 10110 \\ 10110 \\ 10110 \\ \hline 10110 \\ \hline 1001010010 \end{array}$$

$$22 \times 27 = 594$$

bin. dec.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
⋮	⋮

Reglas de divisibilidad

back

... o cómo calcular restos. Se basan en lo que se conoce como **aritmética modular**. **Son distintas en cada base.**

Base 10

$$N = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^4 + a_5 \times 10^5 + a_6 \times 10^6 + a_7 \times 10^7 + a_8 \times 10^8 + a_9 \times 10^9 + a_{10} \times 10^{10} + \dots$$

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
$10^k \pmod{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{3}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$10^k \pmod{4}$	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{6}$	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$10^k \pmod{7}$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5
$10^k \pmod{8}$	1	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{9}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$10^k \pmod{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{11}$	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10
$10^k \pmod{12}$	1	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$10^k \pmod{13}$	1	10	9	12	3	4	1	10	9	12	3	4

Sustituir 10^k por los números de la fila correspondiente a $\text{mod } k$

Base 10: ejemplos

- **Resto de dividir 132 por 2** [o, lo que es lo mismo, $132 \pmod{2}$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir la última cifra por dos, es decir 0.
- **Resto de dividir 132 por 3** [o, lo que es lo mismo, $132 \pmod{3}$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir la suma de todas las cifras por tres, es decir 0.
- **Resto de dividir 132 por 4** [$132 \pmod{4}$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir entre cuatro la suma del doble de las decenas más las unidades; en este caso 0. La tabla nos dice que solo importan los dígitos que ocupan la posición de las decenas y las unidades (gracias a todos esos ceros...).
- **Resto de dividir 132 por 7** [$132 \pmod{7}$]. Algo más complicado...
- **Resto de dividir 413245 por 11** [$413245 \pmod{11}$]. Trocear en pares y sumar hasta que queden dos cifras $41|32|45 \rightarrow 1|18 \rightarrow 19 \rightarrow$ resto 8.

Reglas de divisibilidad

[back](#)

Base 2

$$N = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3 + a_4 \times 2^4 + a_5 \times 2^5 + a_6 \times 2^6 + a_7 \times 2^7 + a_8 \times 2^8 + a_9 \times 2^9 + a_{10} \times 2^{10} + \dots$$

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
$2^k \pmod{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k \pmod{3}$	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10
$2^k \pmod{4}$	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k \pmod{5}$	1	10	100	11	1	10	100	11	1	10	100	11
$2^k \pmod{6}$	1	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10
$2^k \pmod{7}$	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
$2^k \pmod{8}$	1	10	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k \pmod{9}$	1	10	100	1000	111	101	1	10	100	1000	111	101
$2^k \pmod{10}$	1	10	100	1000	110	10	100	1000	110	10	100	1000
$2^k \pmod{11}$	1	10	100	1000	101	1010	1001	111	11	110	1	10
$2^k \pmod{12}$	1	10	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000
$2^k \pmod{13}$	1	10	100	1000	11	110	1100	1011	1001	101	1010	111

Base 2: ejemplos

- **Casos fáciles:** dos, cuatro y ocho (el resto lo dan la última, las dos últimas o las tres últimas cifras respectivamente).
- Los restos módulo 3 se sacan con la misma idea que funciona para los restos módulo 11 en base 10.
- Los restos módulo 7 se sacan con una idea parecida a la segunda de $11 \pmod{10}$. Ejemplo: $1902 = 11|101|101|110_2 \rightarrow 10|011_2 \rightarrow 101_2$.
- Los restos módulo 10 o módulo 13 son un verdadero lío...

- Hay culturas (los Pirahã de la Amazonia) que no tienen palabras para los números...
- Ramon Llull fue un precursor moderno de la notación **binaria**. También Leibniz, Boole, Shannon. Es fundamental para la **electrónica digital**.
- El ADN está escrito en **base 4** con los numerales A, T, G, C (somos un enorme número en base 4...). Se conocen lenguas nativas de Norteamérica que empleaban esta base.
- Numerosas lenguas de Oceanía utilizan sistemas de numeración con bases exóticas como 5, 6, 15, 23 (!), 24 y 27.
- La **base 8** (*octal*) se usaba en lenguas nativas de California y México.
- La **base 12** se usa en lenguas de Nigeria y Nepal. Durante la Revolución francesa se llegó a proponer cambiar a base 12. Para mediar entre los «decimales» y los «duodecimales» Lagrange (¿en broma?) propuso pasar a base 11...
- La **base 20** se usa en la cultura maya, la vasca y en numerosas lenguas de todo el mundo (¿manos y pies?).
- La **base 60** se usaba en Mesopotamia.

Una pregunta

[back](#)

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

Una pregunta

[back](#)

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

¡Sí!... pero solo en base 2, 4 o 16

Una pregunta

back

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

¡Sí!... pero solo en base 2, 4 o 16

Usando la siguiente fórmula maravillosa (D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

¿Cómo funciona?

Hagamos un ejemplo parecido [back](#)

$$\log \frac{10}{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k10^k} \approx 0,105360515656825$$

Para ello calculo la parte decimal de $10^9 \log \frac{10}{9} = \sum_{k=1}^9 \frac{10^{9-k}}{k} + \sum_{k=10}^{\infty} \frac{10^9}{k10^k}$

Partes fraccionarias

$$\left\{ \frac{10^8}{1} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^7}{2} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^6}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{10^5}{4} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^4}{5} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^3}{6} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$\left\{ \frac{10^2}{7} \right\} = \frac{2}{7} \quad \left\{ \frac{10^1}{8} \right\} = \frac{1}{4} \quad \left\{ \frac{10^0}{9} \right\} = \frac{1}{9}$$

Para ello aplico «reglas de divisibilidad» (aritmética modular).

Partes fraccionarias

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{\infty} \frac{10^9}{k10^k} &< \frac{1}{10} \sum_{k=10}^{\infty} 10^{9-k} \\ &= \frac{1}{90} = 0,011111\dots \end{aligned}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^9 \frac{10^{9-k}}{k} \right\} = \frac{163}{252} \approx 0,646825$$

Hagamos un ejemplo parecido [back](#)

$$\log \frac{10}{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k10^k} \approx 0,105360515656825$$

Para ello calculo la parte decimal de $10^9 \log \frac{10}{9} = \sum_{k=1}^9 \frac{10^{9-k}}{k} + \sum_{k=10}^{\infty} \frac{10^9}{k10^k}$

Partes fraccionarias

$$\left\{ \frac{10^8}{1} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^7}{2} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^6}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{10^5}{4} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^4}{5} \right\} = 0 \quad \left\{ \frac{10^3}{6} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$\left\{ \frac{10^2}{7} \right\} = \frac{2}{7} \quad \left\{ \frac{10^1}{8} \right\} = \frac{1}{4} \quad \left\{ \frac{10^0}{9} \right\} = \frac{1}{9}$$

Para ello aplico «reglas de divisibilidad» (aritmética modular).

Partes fraccionarias

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{\infty} \frac{10^9}{k10^k} &< \frac{1}{10} \sum_{k=10}^{\infty} 10^{9-k} \\ &= \frac{1}{90} = 0,011111\dots \end{aligned}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^9 \frac{10^{9-k}}{k} \right\} + \frac{1}{90} = \frac{829}{1260} \approx 0,657937$$

Cambios de base: 2, 4, 8 y 16 back

Son cambios «directos» (basta reemplazar grupos de cifras).

$$\underbrace{1101}_d \underbrace{0100}_4 \underbrace{1101}_d \underbrace{0001}_1 \underbrace{0101}_5 \underbrace{1101}_d \underbrace{0010}_2 \underbrace{0010}_2 \underbrace{1010}_a \underbrace{1000}_8_2 = d4d15d22a8_{16}$$

$$\underbrace{11}_3 \underbrace{01}_1 \underbrace{01}_1 \underbrace{00}_0 \underbrace{11}_3 \underbrace{01}_1 \underbrace{00}_0 \underbrace{01}_1 \underbrace{01}_1 \underbrace{11}_3 \underbrace{01}_1 \underbrace{00}_0 \underbrace{10}_2 \underbrace{00}_0 \underbrace{10}_2 \underbrace{10}_2 \underbrace{10}_2 \underbrace{10}_2 \underbrace{00}_0_2 = 31103101113102022220_4$$

Para pasar de **base dos** a **base ocho** agrupamos las cifras de tres en tres empezando por la derecha.

Si conocemos las cifras en base 16 podemos encontrarlas fácilmente en base 4 y 2 y, de ahí, obtenerlas en base 8.

Además no es necesario conocerlas todas...

Multiplicación rusa

back

Multiplicando sin tablas...

163	234	234×2^0	• Basta saber hacer el doble y la mitad.
81	468	234×2^1	• La idea es escribir uno de los números como suma de potencias de dos. Por ejemplo:
40	936	234×2^2	
20	1872	234×2^3	
10	3744	234×2^4	
5	7488	234×2^5	• Nótese que en base 2 escribimos 163 de la forma 10100011
2	14976	234×2^6	
1	29952	234×2^7	• $163 \times 234 = (2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0) \times 234$
<hr/>			
	38142		• Trabajar en base 2 sin hacerlo del todo...

Ejercicio: adaptar el procedimiento para multiplicar números romanos.

Base 8

back

Octomatics

0 1 2 3 4 5 6 7

∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴
∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴

| ⊥ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕
| ⊥ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

— ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂

— ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂

— ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂ ⊂

0 1 10 11 100 101 110 111

Decimal	Octal	Octom.
$\begin{array}{r} 92 \\ +161 \\ \hline 253 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ +241 \\ \hline 375 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{J J L} \\ + \text{J L J} \\ \hline \text{J W U} \end{array}$
$\begin{array}{r} 253 \\ -161 \\ \hline 92 \end{array}$	$\begin{array}{r} 375 \\ -241 \\ \hline 134 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{J W U} \\ - \text{J L J} \\ \hline \text{J J L} \end{array}$

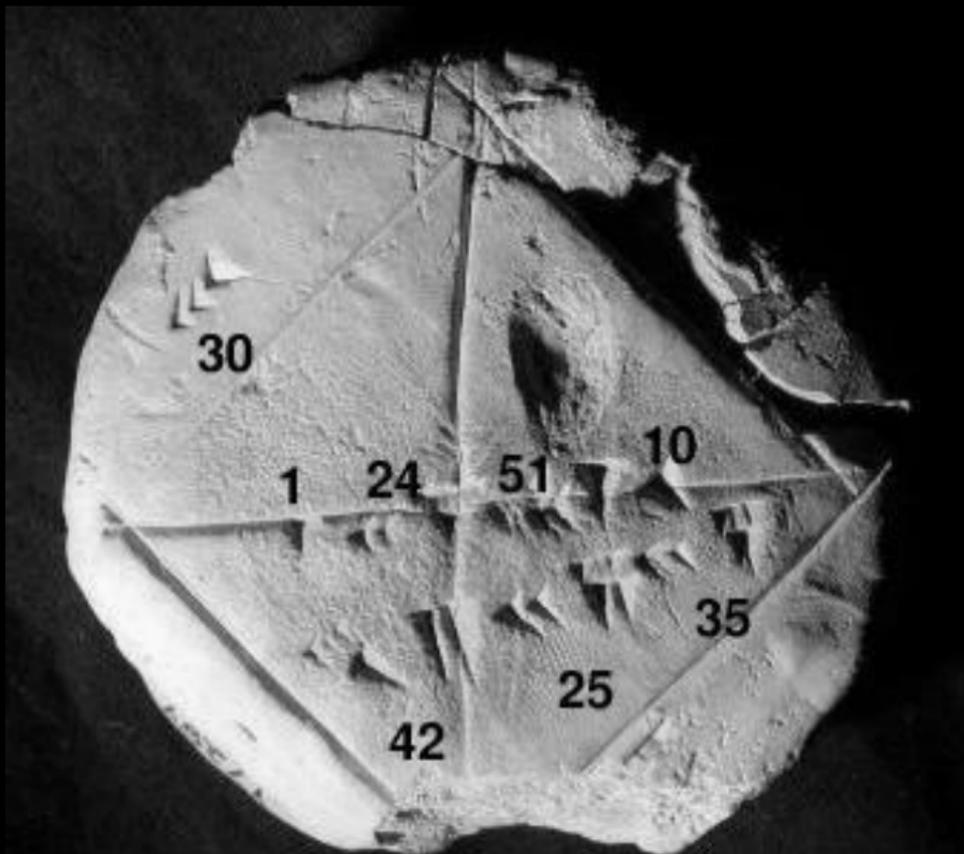
Hay hasta canciones donde aparece la base 8 (*New Math* by Tom Lehrer).

La función base 13 de Conway

- En cada intervalo toma **todos los valores reales**.
- No hay quien pueda pintar su gráfica...
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ hacer lo siguiente:
 - 1 Escribir x en base trece $[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c]$.
 - 2 Quitar signo y coma «decimal».
 - 3 Si a partir de un cierto punto el desarrollo en base 13 de x tiene la forma $ax_1 \cdots x_n cy_1 \cdots$ con $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ entonces $f(x) = x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots$ en base 10.
 - 4 Si a partir de un cierto punto el desarrollo en base 13 de x tiene la forma $bx_1 \cdots x_n cy_1 \cdots$ con $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ entonces $f(x) = -x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots$ en base 10.
 - 5 En el resto de los casos $f(x) = 0$.
- **No es continua** en ningún punto aunque cumple la **propiedad del valor intermedio**.

Base 60

[back](#)



Base 60

[back](#)

𐎶 1	𐎶𐎵 11	𐎶𐎵𐎶 21	𐎶𐎵𐎶𐎵 31	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎵 12	𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎵 32	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 42	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎵 13	𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 53
𐎶𐎶𐎶𐎵 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎵 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎵 59
𐎶 10	𐎶𐎵 20	𐎶𐎵𐎶 30	𐎶𐎵𐎶𐎵 40	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 50	

Para concluir: una adivinanza back



=



31 Oct = 25 Dec

Página 3 [[By Jonathunder - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11808709>]]

Página 3 [[By Benjamins444, edited by Fir0002 - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3177559>]]

Página 3 [[By Jacek rybak - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=65499244>]]

Página 3 [[By User:Yzmo - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2246091>]]

Página 3 [[NASA, ESA, STScI]]

Página 3 [[By لا روسا - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27413286>]]

Página 7 [[By Psihedelista - Own work, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=50144748>]]

Página 8 [[By Ajfweb at English Wikipedia, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46608551>]]

Página 9 [[F. Barbero]]

Página 29 [[<http://www.infoverse.org/octomatics/octomatics.htm>]]

Página 31 [[By Bill Casselman - Own work, CC BY 2.5,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2154237>]]

Página 32 [[By Josell7 - File: Babylonian_numerals.jpg, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9862983>]]

Página 33 [[CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=157476>]]

Página 33 [[By Gerbil - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5840715>]]

¡Gracias!